УДК 519.21

О.В. Іванов, І.М. Савич

μ-ПРИПУСТИМІСТЬ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ СИЛЬНОЗАЛЕЖНОГО ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЯХ РЕГРЕСІЇ

Вступ

Задача оцінювання невідомих параметрів сигналу в моделях спостережень "сигнал плюс шум" – важлива проблема статистики випадкових процесів. Найбільш поширеними у розв'язанні прикладних задач такого типу є оцінки найменших квадратів (о.н.к.), для яких важливо встановити корисні асимптотичні властивості, серед яких чільне місце посідає властивість асимптотичної (тобто для великих часів спостережень) нормальності о.н.к.

У доведенні асимптотичної нормальності істотне значення має збіжність одного інтеграла від спектральної щільності (с.щ.) стаціонарного випадкового шуму до інтеграла цієї щільності за так званою спектральною мірою функції регресії, яку вперше було використано в [1]. Цей матричний інтеграл є головною компонентою коваріаційної матриці граничного нормального розподілу о.н.к. В разі слабкозалежного випадкового шуму така збіжність є прямим наслідком відповідних означень. У працях [2–4] спектральна міра функції регресії регулярно застосовувалась для опису граничних коваріаційних матриць широкого класу статистичних оцінок, які узагальнюють о.н.к., для слабкозалежного стаціонарного шуму. І навпаки, коли в моделі як шум розглядається сильнозалежний випадковий процес, а саме такі моделі зараз інтенсивно вивчаються завдяки численним застосуванням [5–7], збіжність такого інтеграла потребує доведення, оскільки с.щ. сильнозалежного стаціонарного процесу, взагалі кажучи, втрачає властивості неперервності та обмеженості.

Постановка задачі

Мета даної статті полягає в наведенні умов, за яких коваріаційна матриця граничного нормального розподілу о.н.к. припускає зображення у вигляді інтеграла від розривної і необмеженої с.щ. сильнозалежного випадкового шуму. Важливий приклад такого зображення пов'язаний з класичною задачею виявлення прихованих періодичностей (див., наприклад, [8, 9]).

Позначення і означення

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t,\theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1)$$

де $\varepsilon(t), t \in R^1$ – дійсний неперервний у середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес з нульовим середнім. Дійсна функція $g(t,\theta), (t,\theta) \in R_+^1 \times \Theta^c$ (Θ^c – замикання в R^q відкритої множини $\Theta \subset R^q$, що містить істинне значення параметра θ^0), неперервно диференційовна по $\theta \in \Theta$ при кожному фіксованому $t \in R_+^1$ і вимірна по $t \in R_+^1$ при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$. Вважатимемо, що похідні $g_k(t,\theta) = \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} g(t,\theta)$, $k = \overline{1,q}$, локально інтегровані з квадратом по t при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$.

Позначимо

$$d_{kT}^2(\theta) = \int_0^T g_k^2(t,\theta)dt, \; d_T^2(\theta) = \mathrm{diag}(d_{kT}^2(\theta), \, k = \overline{1,q}),$$

$$\nabla g(t,\theta) = (g_k(t,\theta))_{k=1}^q, \; \xi(T) = d_T^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) \nabla g(t,\theta)dt.$$

Для отримання властивості асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (і її модифікацій) параметра $\theta^0 \in \Theta$ за спостереженнями (1), важливо знати асимптотичну при $T \to \infty$ поведінку коваріаційної матриці випадкового вектора $\xi(T)$ (див., наприклад, [1–5]). В одному важливому випадку, до розгляду якого ми переходимо, знаходження границі коваріаційних матриць

$$K = \lim_{T\to\infty} K(T) = \lim_{T\to\infty} E\xi(T)\xi^*(T),$$

базується на досить простих припущеннях.

Нехай $\theta \in \Theta$ – фіксоване значення параметра, S^1 – σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин R^1. Розглянемо на (R^1, S^1) сім'ю комплексних матричних мір $\mu_T(d\lambda,\theta) = \mu_T(\lambda,\theta)d\lambda$ з матричними щільностями відносно міри Лебега

$$\mu_T(\lambda,\theta) = (\mu_T^{kl}(\lambda,\theta))_{k,l=1}^q,$$

$$\mu_T^{kl}(\lambda,\theta) = g_T^k(\lambda,\theta)\overline{g_T^l(\lambda,\theta)} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g_T^k(\lambda,\theta)|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |g_T^l(\lambda,\theta)|^2 d\lambda \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$g_T^k(\lambda,\theta) = \int_0^T e^{i\lambda t} g_k(t,\theta)dt.$$

I. Сім'я мір $\mu_T(d\lambda,\theta)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до додатно означеної матричної міри $\mu(d\lambda,\theta)$. Це означає, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ матриці $\mu(d\lambda,\theta)$ є комплексними зарядами обмеженої варіації і матриця $\mu(A,\theta)$ додатно означена для будь-якої множини $A \in S^1$.

Означення **1** [1—5]. Міра $\mu(d\lambda,\theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t,\theta)$. Припускається, що міра $\mu(d\lambda,\theta)$ не вироджена, тобто не вироджена матриця $\mu(R^1,\theta)$.

За умов $\lim_{T\to\infty} d_{kT}^2(\theta) = \infty$, $\sup_{0\le t\le T} |g_k(t,\theta)| = o(d_{kT}^2(\theta))$, $T \to \infty$, $k = \overline{1,q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ визначаються із співвідношень

$$R^{kl}(s) = \lim_{T\to\infty} d_{kT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T g_k(t+s,\theta) g_l(t,\theta)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \mu^{kl}(d\lambda,\theta),\ k,l = \overline{1,q}$$

при додатковому припущенні неперервності матриці $R(s) = (R^{kl}(s))_{k,l=1}^q$ в нулі [2].

Нехай коваріаційна функція (к.ф.) $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$ інтегрована на R^1 (випадок слабкої залежності $\varepsilon(t)$). Тоді процес $\varepsilon(t), t \in R^1$ має обмежену і неперервну с.щ. $f(\lambda), \lambda \in R^1$ та

$$K(T) =$$

$$= d_T^{-1}(\theta) \left(\int_0^T \int_0^T B(t-s) \nabla g(t,\theta) \nabla g^*(s,\theta) dt ds \right) d_T^{-1}(\theta) =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu_T(\lambda,\theta) d\lambda \underset{T\to\infty}{\to} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda,\theta) = K, \quad (2)$$

якщо вірна умова I.

Коли f обмежена с.щ. і міра μ точок її розриву дорівнює нулю, то збіжність (2) також має місце [10]. З іншого боку, якщо к.ф. $B(t)$ не інтегрована (випадок сильної залежності $\varepsilon(t)$), а с.щ. існує, то вона втрачає властивість обмеженості, і тому граничний перехід у (2) треба обґрунтовувати.

Означення **2** [2]. С.щ. f називається μ-припустимою, якщо вона інтегрована за мірою μ, тобто всі елементи матриці $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda,\theta)$ набувають скінченних значень, і

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu_T(d\lambda,\theta) \underset{T\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda,\theta). \quad (3)$$

Наступні дві умови стосуються функції f, μ-припустимість якої ми обговорюємо. Множина індексів J в умовах II—IV, взагалі кажучи, може бути однією з трьох множин: $\overline{-m,m}$, $\overline{-m,m}\setminus\{0\}$, $\{0\}$. Тепер дамо формулювання для $J = \overline{-m,m}$.

II. С.щ. $f \in C(R^1 \setminus \{\lambda_j, j\in J\})$, $\lambda_{-j} = -\lambda_j$, $j = \overline{1,m}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < +\infty$ задовольняє вимогу

$$\lim_{\lambda\to\lambda_j} f(\lambda)|\lambda-\lambda_j|^{1-\alpha_j} = a_j > 0, \quad (4)$$

$\alpha_j \in (0,1)$, $j \in J$; $\alpha_j = \alpha_{-j}$, $a_j = a_{-j}$, $j = \overline{1,m}$.

Із (4) випливає, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $j \in J$ існує $\delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0$, таке, що

$$f(\lambda) < \frac{a_j + \varepsilon}{|\lambda-\lambda_j|^{1-\alpha_j}} \text{ при } |\lambda-\lambda_j| < \delta_j.$$

Тоді, якщо $|\lambda-\lambda_j| < \delta_j$, то

$$\{\lambda : f(\lambda) > c\} \subset$$

$$\subset \left\{ \lambda : |\lambda-\lambda_j| < \left(\frac{a_j+\varepsilon}{c} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \right\} = V_j(c), \quad (5)$$

причому c повинно задовольняти нерівність $\left(\frac{a_j+\varepsilon}{c} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \le \delta_j$, або $c \ge \frac{a_j+\varepsilon}{\delta_j^{1-\alpha_j}(\varepsilon)} = c_j(\varepsilon)$.

III. Нехай $\varepsilon_0 > 0$ фіксовано. Існує таке $c_0 \geq \max_{j \in J} c_j(\varepsilon_0)$, що для $c \geq c_0$

$$\{\lambda : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{j \in J} V_j(c). \tag{6}$$

Із (5) видно, що для достатньо великих c (нехай вже для $c \geq c_0$) околи $V_j(c)$, $j \in J$, у (6) не перетинаються та $|V_j(c)| \downarrow 0$ при $c \to \infty$, $j \in J$.

IV. Для достатньо великих $T (T > T_0)$ маємо

$$d_{kT}^{-1}(\theta) \max_{\lambda \in V_j(c_0)} |g_T^k(\lambda, \theta)| \leq h_{jk} < +\infty, \quad j \in J,\ k = \overline{1, q}. \tag{7}$$

Зауважимо, що виконання нерівності (7) можна вимагати для $j = \overline{0, m}$, оскільки $V_{-j}(c_0) = -V_j(c_0)$, $j = \overline{1, m}$, завдяки парності с.щ. f.

Основний результат

Теорема. Якщо виконано умови I–IV та f інтегрована за мірою μ, то f є μ-припустимою функцією.

Доведення. Для $c \geq c_0$ розглянемо зрізку

$$f^c(\lambda) = f(\lambda)\chi\{\lambda : f(\lambda) \leq c\} + c\chi\{\lambda : f(\lambda) > c\}$$

і запишемо

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu_T^{kl}(d\lambda, \theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{kl}(d\lambda, \theta) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu_T^{kl}(d\lambda, \theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f^c(\lambda)\mu_T^{kl}(d\lambda, \theta) \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^c(\lambda)\mu_T^{kl}(d\lambda, \theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f^c(\lambda)\mu^{kl}(d\lambda, \theta) \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^c(\lambda)\mu^{kl}(d\lambda, \theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{kl}(d\lambda, \theta) \right| =$$

$$= I_1^{kl}(T, c) + I_2^{kl}(T, c) + I_3^{kl}(c), \quad k, l = \overline{1, q}.$$

За означенням комплексної матричної міри μ для будь-якого набору комплексних чисел $z = (z_1, ..., z_q)$ функція множин $\mathrm{M}_z(\mathrm{A}, \theta) = \sum_{k,l=1}^{q} \mu^{kl}(\mathrm{A}, \theta) z_k \bar{z}_l \geq 0$, $\mathrm{A} \in S^1$ є міра у звичайному розумінні цього слова. Тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^c(\lambda)\mathrm{M}_z(d\lambda, \theta) \xrightarrow[c \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mathrm{M}_z(d\lambda, \theta) \tag{8}$$

за теоремою Лебега про монотонну збіжність.

Якщо в наборі z тільки z_k і z_l не дорівнюють нулю, то беручи до уваги, що діагональні елементи μ^{kk} і μ^{ll} є звичайні міри, з (8) отримуємо, що при $c \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda) - f^c(\lambda))(\mu^{kl}(d\lambda, \theta) z_k \bar{z}_l + \mu^{lk}(d\lambda, \theta) z_l \bar{z}_k) \to 0. \tag{9}$$

Зауважимо, що $\mu^{kl} = \overline{\mu^{lk}}$, й тому, якщо взяти, наприклад, $z_k = z_l = 1$, то з (9) маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda) - f^c(\lambda)) \operatorname{Re} \mu^{kl}(d\lambda, \theta) \xrightarrow[c \to \infty]{} 0,$$

а якщо взяти $z_k = 1$, $z_l = i$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda) - f^c(\lambda)) \operatorname{Im} \mu^{kl}(d\lambda, \theta) \xrightarrow[c \to \infty]{} 0.$$

Таким чином, отримаємо

$$\lim_{c \to \infty} I_3^{kl}(c) = 0. \tag{10}$$

Очевидно, за умови I при фіксованому c матимемо

$$\lim_{T \to \infty} I_2^{kl}(T, c) = 0. \tag{11}$$

З іншого боку, за умов теореми для $T > T_0$

$$I_1^{kl}(T, c) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\{\lambda : f(\lambda) > c\}} (f(\lambda) - c) \frac{|g_T^k(\lambda, \theta)||g_T^l(\lambda, \theta)|}{d_{kT}(\theta) d_{lT}(\theta)} d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J} h_{jk} h_{jl} \int_{V_j(c)} f(\lambda) d\lambda \xrightarrow[c \to \infty]{} 0. \tag{12}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ і $T > T_0$ можна взяти таке $c_1 = c_1(\varepsilon) \geq c_0$, що для $c > c_1$ маємо $I_1^{kl}(T,c) < \varepsilon/3$, і таке $c_2 = c_2(\varepsilon) \geq c_0$, що для $c > c_2$ виконується нерівність $I_3^{kl}(c) < \varepsilon/3$. Фіксуємо далі $c > c_1 \vee c_2$ і знаходимо $T_1 = T_1(\varepsilon) > T_0$, таке, що для $T > T_1$ $I_2^{kl}(T,c) < \varepsilon/3$. Бачимо, що із співвідношень (10)–(12), вірних для $k,l = \overline{1,q}$, випливає (3). Теорему доведено.

Приклади

Розглянемо деякі приклади к.ф. і с.щ., для яких виконано умови теореми.

1. $\mathrm{B}(t) = \mathrm{B}_{u,\alpha}(t)$, $u = 1,2,3$, де

$$\mathrm{B}_{1,\alpha}(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}}, \quad \mathrm{B}_{2,\alpha}(t) = \frac{1}{1+|t|^{\alpha}},$$
$$\mathrm{B}_{3,\alpha}(t) = \frac{1}{(1+|t|)^{\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{13}$$

Всі к.ф. (13) можна зобразити у вигляді $\mathrm{B}(t) = \dfrac{L(|t|)}{|t|^{\alpha}}$ з повільно змінними (на нескінченності) функціями $L_1(t) = \dfrac{t^{\alpha}}{(1+t^2)^{\alpha/2}}$, $L_2(t) = \dfrac{t^{\alpha}}{1+t^{\alpha}}$, $L_3(t) = \dfrac{t^{\alpha}}{(1+t)^{\alpha}}$.

Відповідні с.щ. (подробиці див., наприклад, у [6]) мають особливість тільки в точці $\lambda = 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} f_{u,\alpha}(\lambda)|\lambda|^{1-\alpha} = a(\alpha), \quad u = 1,2,3,$$

де $a(\alpha) = \dfrac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}$ — тауберова константа.

2. $\mathrm{B}(t) = \mathrm{B}_{\alpha,\chi}(t) = \dfrac{\cos\chi t}{(1+t^2)^{\alpha/2}}$, $\alpha \in (0,1)$, $\chi > 0$.

Асимптотичну поведінку відповідної с.щ. $f_{\alpha,\chi}(\lambda)$ докладно досліджено в [7]. Зокрема, ця с.щ. має особливості тільки в точках $\lambda = \pm\chi$:

$$\lim_{\lambda \to \pm\chi} f_{\alpha,\chi}(\lambda)|\lambda \mp \chi|^{1-\alpha} = \frac{1}{2}a(\alpha).$$

Зважаючи на те, що к.ф. $\mathrm{B}_{1,\alpha}$ з першого прикладу дорівнює к.ф. $\mathrm{B}_{\alpha,0}$ з другого прикладу, можемо узагальнити приклади 1 та 2 таким чином.

3. Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < +\infty$; $\alpha_j \in (0,1)$, $\beta_j \neq 0$, $j = \overline{0,m}$ — деякі числа. Тоді к.ф.

$$\mathrm{B}(t) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j^2 \mathrm{B}_{\alpha_j,\lambda_j}(t) \tag{14}$$

відповідає с.щ.

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j^2 f_{\alpha_j,\lambda_j}(\lambda), \tag{15}$$

яка задовольняє умови II і III теореми.

Наступний приклад функції регресії є важливим у численних застосуваннях, пов'язаних з виявленням прихованих періодичностей [8, 9].

4. Нехай

$$g(t,\theta^0) = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k^0 \cos\varphi_k^0 t + \mathrm{B}_k^0 \sin\varphi_k^0 t), \tag{16}$$

де

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \ldots, \theta_{3n-2}^0, \theta_{3n-1}^0, \theta_{3n}^0) =$$
$$= (\mathrm{A}_1^0, \mathrm{B}_1^0, \varphi_1^0, \ldots, \mathrm{A}_n^0, \mathrm{B}_n^0, \varphi_n^0),$$
$$C_k^{0\,2} = \mathrm{A}_k^{0\,2} + \mathrm{B}_k^{0\,2} > 0, \; k = \overline{1,n},$$
$$\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0) \subset \Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in$$
$$\in R^n : 0 \leq \underline{\varphi} < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n < \overline{\varphi} < +\infty\}.$$

Функція $g(t,\theta^0)$ має блочно-діагональну спектральну міру $\mu(d\lambda,\theta^0)$ (див., наприклад, [9]) з блоками

$$\begin{pmatrix} \delta_k & i\rho_k & \overline{\beta}_k \\ -i\rho_k & \delta_k & \overline{\gamma}_k \\ \beta_k & \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де $\beta_k = \dfrac{\sqrt{3}(\mathrm{B}_k^0\delta_k + i\mathrm{A}_k^0\rho_k)}{2C_k^0}$, $\gamma_k = \dfrac{\sqrt{3}(-\mathrm{A}_k^0\delta_k + i\mathrm{B}_k^0\rho_k)}{2C_k^0}$, міра $\delta_k = \delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ зосереджені в точках $\pm\varphi_k^0$, причому

$$\delta_k(\{\pm\varphi_k^0\}) = \frac{1}{2},\ \rho_k(\{\pm\varphi_k^0\}) = \pm\frac{1}{2},\ k = \overline{1,n}.$$

Таким чином, для функції (16) умову I виконано.

Очевидно, матимемо

$$g_{3k-2}(t,\theta^0) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{A}_k} g(t,\theta^0) = \cos\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k-1}(t,\theta^0) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{B}_k} g(t,\theta^0) = \sin\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k}(t,\theta) = \frac{\partial}{\partial \varphi_k} g(t,\theta^0) =$$

$$= -\mathrm{A}_k^0 t\sin\varphi_k^0 t + \mathrm{B}_k^0 t\cos\varphi_k^0 t,\ k = \overline{1,n}.$$

Легко з'ясувати, що коли с.щ. $f(\lambda)$ задовольняє умову II і $\lambda_j \neq \varphi_k^0$, $j = \overline{0,m}$, $k = \overline{1,n}$, то можна вказати такі околи $V_j(c_0)$ точок λ_j, які не містять точок φ_k^0, що для $T > T_0$ виконано умову, сильнішу за IV:

$$d_{lT}^{-1}(\theta^0) \max_{\lambda\in V_j(c_0)} |g_T^l(\lambda,\theta^0)| \le h_{jl} T^{-1/2},$$

$$j = \overline{0,m},\ l = 3k-2, 3k-1, 3k,\ k = \overline{1,n}.$$

З наведених прикладів випливає такий наслідок.

Наслідок. Нехай у моделі спостережень (1) випадковий процес $\varepsilon(t)$ має к.ф. (14) або с.щ. (15) і функція регресії має вигляд (16). Тоді якщо $\lambda_j \neq \varphi_k^0$, $j = \overline{0,m}$, $k = \overline{1,n}$, то с.щ. (15) є μ-припустимою, де μ задається матрицями (17), та блочно-діагональна матриця K складається з блоків

$$2\pi f(\varphi_k^0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{B}_k^0}{\mathrm{C}_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{A}_k^0}{\mathrm{C}_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{B}_k^0}{\mathrm{C}_k^0} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{A}_k^0}{\mathrm{C}_k^0} & 1 \end{pmatrix},\ k = \overline{1,n}.$$

Висновки

Зображення граничної коваріаційної матриці о.н.к. у вигляді інтеграла від розривної і необмеженої с.щ. сильнозалежного випадкового шуму за спектральною мірою функції регресії дає можливість отримати асимптотичну нормальність о.н.к. параметрів лінійних і нелінійних моделей регресії з сильнозалежним шумом, яку раніше встановити не вдавалось.

Отриманий результат дозволяє також суттєво просунутись у вивченні асимптотичного розподілу М-оцінок параметрів лінійної та нелінійної регресії з сильнозалежним випадковим шумом. Відповідну центральну граничну теорему у загальному випадку М-оцінок ще не доведено. Отримана у статті теорема дозволяє, принаймні, записати кореляційну матрицю граничного закону розподілу М-оцінки у вигляді суми ряду з матричних інтегралів за спектральною мірою функції регресії від згорток с.щ., які відповідають к.ф., розглянутим у статті.

А.В. Иванов, И.Н. Савич

μ-ДОПУСТИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СИЛЬНОЗАВИСИМОГО СЛУЧАЙНОГО ШУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ РЕГРЕССИИ

Получены достаточные условия, при которых ковариационная матрица предельного нормального распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной модели регрессии с сильнозависимым стационарным случайным шумом может быть представлена в виде интеграла от разрывной и неограниченной спектральной плотности этого шума по спектральной мере функции регрессии.

O.V. Ivanov, I.M. Savych

μ-ADMISSIBILITY OF SPECTRAL DENSITY OF STRONGLY DEPENDENT RANDOM NOISE IN NONLINEAR REGRESSION MODELS

In this paper, we highlight the obtained sufficient conditions, under which the limiting normal distribution covariance matrix of the least squares estimator of the nonlinear regression model parameter with strongly dependent stationary random noise can be represented as an integral of discontinuous and unbounded spectral density of the noise by the regression function spectral measure.

1. *Grenander U., Rozenblatt M.* Statistical analysis of stationary time series. – N.Y.: John Wiley and Sons, 1957. – 300 p.
2. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 383 с.
3. *Холево А.С.* Об оценках коэффициентов регрессии // Теория вероятностей и ее применение. – 1969. – **14**. – С. 78–101.
4. *Холево А.С.* Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии // Там же. – 1971. – **16**. – С. 724–728.
5. *Ivanov A.V., Leonenko N.N.* Statistical Analysis of Random Fields. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 244 p.
6. *Ivanov A.V., Leonenko N.N.* Asymptotic theory of nonlinear regression with long-range dependence // Math. Methods of Stat. – 2004. – **13**, N 2. – P. 153–178.
7. *Anh V.V., Knopova V.P., Leonenko N.N.* Continuous – time stochastic processes with cyclical long – range dependence // Aust. N.Z.J. Stat. – 2004. – **46**, N 2. – P. 275–296.
8. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. – М.: Наука, 1965. – 244 с.
9. *Ivanov A.V.* A solution of the problem of detecting hidden periodicities // Theor. Probability and Math. Statist. – 1980. – N 20. – P. 51–68.
10. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 січня 2009 року